E.P.I.T.A.

mathématiques 2 - 2001 (1 heure 30)

****

On se propose d'étudier le mouvement vibratoire d'une corde, supposée infinie au I et finie au II.

Partie I : *étude d'une corde vibrante infinie*

On suppose ici la corde vibrante infinie. Lorsque la position d'équilibre d'une telle corde est assimilée à l'axe $x'Ox$, on démontre, pour tout nombre réel t et pour tout nombre réel x, que l'amplitude $u(x, t)$ à l'instant t du point d'abscisse x de la corde est solution de l'équation suivante (où v désigne une constante strictement positive) :

$$\text{(CV)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

On se propose d'étudier les solutions de cette équation avec les conditions initiales suivantes, supposées réalisées pour tout nombre réel x :

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

où f désigne une fonction donnée, supposée de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (cette hypothèse signifie que la corde est lâchée sans vitesse initiale à partir d'une position initiale définie par la donnée de f).

1°) Montrer que l'application $\phi : (x, t) \to (X = x + vt,\ T = x - vt)$ réalise un C^2-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, et préciser le difféomorphisme inverse ϕ^{-1}.

2°) <u>Etude d'une équation aux dérivées partielles équivalente à (CV)</u>

Pour toute fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, supposée de classe C^2, on pose $u = U_o \phi$, c'est à dire :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad u(x,t) = U(x+vt, x-vt).$$

a) Exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$ en fonction de v et des dérivées partielles de la fonction U au point $(x+vt, x-vt)$.

b) En déduire que u satisfait l'équation des cordes vibrantes (CV) si et seulement si U satisfait l'équation aux dérivées partielles (E) suivante :

$$\forall (X, T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial T}(X,T) = 0.$$

3°) <u>Résolution d'une équation aux dérivées partielles équivalente à (CV)</u>

a) Montrer qu'une fonction $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, supposée de classe C^2, est solution de (E) si et seulement s'il existe deux fonctions A et B de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (X, T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad U(X,T) = A(T) + B(X).$$

b) En déduire l'expression de $u = U_o \phi$ en fonction de A et B.

c) Déterminer les fonctions A, B et u pour que u vérifie d'une part l'équation (CV) et d'autre part les conditions initiales données.

Partie II : *étude d'une corde vibrante finie*

On suppose ici la corde vibrante de longueur finie, supposée égale à π (ce qui est rendu possible par le choix d'une unité de longueur convenable). Lorsque la position d'équilibre d'une telle corde est assimilée au segment $[0, \pi]$ de l'axe $x'Ox$, on démontre, pour tout nombre réel t et pour tout nombre réel x appartenant à $[0, \pi]$, que l'amplitude $u(x, t)$ à l'instant t du point d'abscisse x de la corde est solution de l'équation suivante (où v désigne une constante strictement positive) :

$$(CV)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

On se propose d'étudier les solutions de cette équation avec :

- les conditions initiales suivantes, supposées réalisées pour tout nombre réel x appartenant à $[0, \pi]$:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

où f désigne une fonction donnée, supposée de classe C^2 de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ (cette hypothèse signifie que la corde est lâchée sans vitesse initiale à partir d'une position initiale définie par la donnée de f).

- les conditions aux limites suivantes, réalisées pour tout nombre réel t :

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

(cette hypothèse signifie que la corde est fixée à ses extrémités ; pour $t = 0$, on a donc $f(0) = f(\pi) = 0$).

Dans toute la suite, on suppose donc que $f(0) = f(\pi) = 0$, mais aussi que $f''(0) = f''(\pi) = 0$.
Enfin, on prolonge f en une fonction impaire et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

4°) Existence d'une solution vérifiant les conditions données

a) Montrer que la fonction f prolongée comme indiqué ci-dessus est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

b) On considère la fonction u définie sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$ par :

$$u(x,t) = \frac{f(x+vt) + f(x-vt)}{2}.$$

Montrer que u est de classe C^2 sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$ et prouver qu'elle est solution de l'équation des cordes vibrantes (CV) avec les conditions initiales et les conditions aux limites définies plus haut.

5°) Unicité d'une solution par considération de l'énergie.

On considère deux solutions u_1 et u_2 de l'équation (CV) de classe C^2 sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$ et vérifiant toutes les deux les conditions initiales et les conditions aux limites définies plus haut.
On pose alors $u = u_1 - u_2$ et on introduit la fonction d'énergie suivante :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{1}{v^2}\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]^2 + \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]^2\right)dx.$$

a) Montrer que la fonction E est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ (on citera le théorème utilisé), puis préciser sa dérivée sous forme d'une intégrale.

b) Déterminer la dérivée par rapport à la variable x de la fonction $x \to \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$.

En déduire qu'on a :

$$E'(t) = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]_0^\pi.$$

b) En déduire que E est une fonction constante, puis montrer qu'elle est nulle sur $[0, +\infty[$.

c) Etablir enfin que $u_1 = u_2$.

***